

Capítulo 4

Espacios Vectoriales

4.1. Definición

Un espacio vectorial definido en el campo de los reales, es un conjunto de vectores no vacíos, que está cerrado bajo una operación de adición o ley de composición interna (L.C.I.) y una operación de multiplicación escalar o ley de composición externa. (L.C.E.).

Espacio vectorial se representa, mediante un conjunto ordenado de 4 componentes: $(V, +, \mathbb{R}, \cdot)$
Donde:

V = Conjunto de vectores no vacíos.

$+$ = Es una L.C.I. en V .

$\mathbb{R}$ = Es el campo de los reales.

$\cdot$ = Es una L.C.E. en V .

La suma o adición en V cumple con los siguientes axiomas:

Axioma 4.1 La suma es una ley de composición interna en V .
En símbolos: $\vec{x} \in V \wedge \vec{y} \in V \Rightarrow \vec{x} + \vec{y} \in V$.

Axioma 4.2 La suma es conmutativa en V .
Significa que: $\forall \vec{x}, \forall \vec{y} \in V : \vec{x} + \vec{y} = \vec{y} + \vec{x}$.

Axioma 4.3 La suma es asociativa en V .
Es decir: $\forall \vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in V : (\vec{x} + \vec{y}) + \vec{z} = \vec{x} + (\vec{y} + \vec{z})$.

Axioma 4.4 Existe un elemento neutro para la suma en V .
El elemento neutro o vector nulo se denota por $\vec{0}$.
En símbolos: $\exists \vec{0} \in V / \forall \vec{x} \in V : \vec{x} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{x} = \vec{x}$.

Axioma 4.5 Todo elemento de V admite un inverso aditivo u opuesto en V .
Al elemento opuesto del vector $\vec{x}$, denotaremos por $(-\vec{x})$.
Es decir: $\forall \vec{x} \in V : \exists (-\vec{x}) \in V / \vec{x} + (-\vec{x}) = -\vec{x} + \vec{x} = \vec{0}$.

La multiplicación escalar cumple con los axiomas siguientes:

Axioma 4.6 El producto escalar es una ley de composición externa en V .
En símbolos: $\alpha \in \mathbb{R} \wedge \vec{x} \in V \Rightarrow \alpha \vec{x} \in V$.

Axioma 4.7 El producto escalar satisface la asociatividad mixta.

Significa que: $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}; \forall \vec{x} \in V : \alpha(\beta \vec{x}) = (\alpha\beta) \vec{x}$.

Axioma 4.8 El producto escalar es distributivo respecto a la suma de escalares.

Es decir: $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}; \forall \vec{x} \in V : (\alpha + \beta) \vec{x} = \alpha \vec{x} + \beta \vec{x}$.

Axioma 4.9 El producto escalar es distributivo respecto a la suma de vectores.

Es símbolos: $\forall \alpha \in \mathbb{R}; \forall \vec{x}, \vec{y} \in V : \alpha(\vec{x} + \vec{y}) = \alpha \vec{x} + \alpha \vec{y}$.

Axioma 4.10 La unidad que constituye ser un elemento multiplicativo en los reales, es neutro para el producto.

Es decir: $\forall \vec{x} \in V : 1 \cdot \vec{x} = \vec{x}$.

Sea el conjunto $V = \mathbb{R}^2 = \{(a, b) / a \in \mathbb{R} \wedge b \in \mathbb{R}\}$.

La adición definida en $\mathbb{R}^2$ por:

$$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d) \in \mathbb{R}^2$$

El producto de escalares por elementos de $\mathbb{R}^2$ definido mediante:

$$\alpha(a, b) = (\alpha a, \alpha b) \in \mathbb{R}^2$$

Por tanto, la cuaterna $(\mathbb{R}^2, +, \mathbb{R}, \cdot)$ es el espacio vectorial de los pares ordenados sobre el campo de los reales; y que verifica todos los axiomas estudiados.

Sea: $\mathbb{R}^3 = \{(x, y, z) / x \in \mathbb{R} \wedge y \in \mathbb{R} \wedge z \in \mathbb{R}\}$

La adición definida en $\mathbb{R}^3$ por:

$$(x_1, y_1, z_1) + (x_2, y_2, z_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2) \in \mathbb{R}^3$$

El producto de escalares por elementos de $\mathbb{R}^3$ definido mediante:

$$\alpha(x, y, z) = (\alpha x, \alpha y, \alpha z) \in \mathbb{R}^3$$

Por tanto la cuaterna $(\mathbb{R}^3, +, \mathbb{R}, \cdot)$ es un espacio vectorial de las ternas sobre el campo de los reales.

Generalizando: $(\mathbb{R}^n, +, \mathbb{R}, \cdot)$.

Sea $\mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) / x_1 \in \mathbb{R} \wedge x_2 \in \mathbb{R} \wedge \dots \wedge x_n \in \mathbb{R}\}$

Sus elementos se llaman n -adas.

La suma definida en $\mathbb{R}^n$ por:

$$(x_1, x_2, \dots, x_n) + (y_1, y_2, \dots, y_n) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n) \in \mathbb{R}^n$$

El producto de escalares por los elementos de $\mathbb{R}^n$ definido mediante:

$$\alpha(x_1, x_2, \dots, x_n) = (\alpha x_1, \alpha x_2, \dots, \alpha x_n) \in \mathbb{R}^n$$

Por tanto, la cuaterna $(\mathbb{R}^n, +, \mathbb{R}, \cdot)$ es un espacio vectorial de las n -adas sobre el campo de los reales.

4.2. Combinación lineal de vectores

Si $A = \{\vec{V}_1, \vec{V}_2, \dots, \vec{V}_n\}$ es un conjunto de vectores no vacíos del espacio vectorial $(V, +, \mathbb{R}, \cdot)$; se denomina combinación lineal de 'n' vectores dados, a la suma de esos vectores previamente multiplicados por escalares arbitrarios.

$$\text{Combinación lineal: } \sum_{i=1}^n \alpha_i \vec{V}_i = \alpha_1 \vec{V}_1 + \alpha_2 \vec{V}_2 + \dots + \alpha_n \vec{V}_n.$$

Asimismo, se puede afirmar que el vector $\vec{V}$ es una combinación lineal de los vectores de $A = \{\vec{V}_1 + \vec{V}_2 + \dots + \vec{V}_n\}$, si existen escalares $(\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n)$ tales que:

$$\vec{V} = \alpha_1 \vec{V}_1 + \alpha_2 \vec{V}_2 + \dots + \alpha_n \vec{V}_n$$

Ejemplo 4.1 Sea el espacio vectorial: $(\mathbb{R}^2, +, \mathbb{R}, \cdot)$, el conjunto

$$A = \{ \vec{V}_1 = (2, 3), \vec{V}_2 = (-3, 5) \}; \text{ y el vector } \vec{V} = (4, 6)$$

Determinar si el vector $\vec{V}$ es posible expresar como combinación lineal de A.

$$\begin{aligned} \vec{V} &= \alpha_1 \vec{V}_1 + \alpha_2 \vec{V}_2 \\ (*) \quad (4, 6) &= \alpha_1 (2, 3) + \alpha_2 (-3, 5) \\ (4, 6) &= (2\alpha_1, 3\alpha_1) + (-3\alpha_2, 5\alpha_2) \\ (4, 6) &= (2\alpha_1 - 3\alpha_2, 3\alpha_1 + 5\alpha_2) \end{aligned}$$

Igualando sus componentes y formando sistema:

$$\begin{cases} (1) \quad 2\alpha_1 - 3\alpha_2 = 4 & (-3) \\ (2) \quad 3\alpha_1 + 5\alpha_2 = 6 & (5) \end{cases}$$

$$\begin{array}{r|l} \begin{array}{r} -6\alpha_1 + 9\alpha_2 = -12 \\ 6\alpha_1 + 10\alpha_2 = 12 \\ \hline 19\alpha_2 = 0 \\ \alpha_2 = 0 \end{array} & \begin{array}{l} \text{Sustituyendo en (1)} \\ 2\alpha_1 - 3(0) = 4 \\ \alpha_1 = 2 \end{array} \end{array}$$

Verificando en ecuación (*):

$$\begin{aligned} (4, 6) &= 2(2, 3) + 0(-3, 5) \\ (4, 6) &= (4, 6) \end{aligned}$$

∴ El vector $\vec{V}$ es posible expresar como combinación lineal de A.

Ejemplo 4.2 Sea el espacio vectorial: $(\mathbb{R}^3, +, \mathbb{R}, \cdot)$; el conjunto $C = \{ \vec{V}_1 = (-2, 0, 1), \vec{V}_2 = (-1, -3, -1) \}$ y el vector: $\vec{V} = (4, -3, 2)$.

Averiguar si el vector $\vec{V}$ es posible expresar como combinación lineal de C.

$$\begin{aligned} \vec{V} &= \alpha_1 \vec{V}_1 + \alpha_2 \vec{V}_2 \\ (*) \quad (4, -3, 2) &= \alpha_1 (-2, 0, 1) + \alpha_2 (-1, -3, -1) \\ (4, -3, 2) &= (-2\alpha_1, 0, \alpha_1) + (-\alpha_2, -3\alpha_2, -\alpha_2) \\ (4, -3, 2) &= (-2\alpha_1 - \alpha_2, -3\alpha_2, \alpha_1 - \alpha_2) \end{aligned}$$

Igualando sus componentes y resolviendo el sistema:

$$\begin{cases} (1) & -2\alpha_1 - \alpha_2 = 4 \\ (2) & -3\alpha_2 = -3 \\ (3) & \alpha_1 - \alpha_2 = 2 \end{cases} \quad (-1) \Rightarrow \boxed{\alpha_2 = 1}$$

Sustituyendo en (3)

$$\alpha_1 - 1 = 2$$

$$\boxed{\alpha_1 = 3}$$

Verificando en ecuación (*):

$$\begin{aligned} (4, -3, 2) &= 3(-2, 0, 1) + 1(-1, -3, -1) \\ (4, -3, 2) &= (-6, 0, 3) + (-1, -3, -1) \\ (4, -3, 2) &= (-6 - 1, 0 - 3, 3 - 1) \\ (4, -3, 2) &\neq (-7, -3, 2) \end{aligned}$$

$\therefore$ El vector $\vec{V}$ no es posible expresar como combinación lineal de C .

4.3. Interdependencia lineal de vectores

4.3.1. Dependencia lineal

Dado un conjunto finito de vectores $A = \{\vec{V}_1, \vec{V}_2, \dots, \vec{V}_r\}$ se afirma que A es linealmente dependiente, si es posible encontrar una combinación lineal de los vectores de A con escalares no todos nulos (es decir que por lo menos uno de los escalares debe ser distinto de cero); de tal manera que esa combinación lineal sea igual al vector nulo.

Es decir: $A = \{\vec{V}_1, \vec{V}_2, \dots, \vec{V}_r\}$

A es Linealmente Dependiente $\Leftrightarrow (\exists i) / \sum_{i=1}^r \alpha_i \vec{V}_i = \vec{0} \wedge \alpha_i \neq 0$.

Ejemplo 4.3 1. Sea el espacio vectorial $(\mathbb{R}^3, +, \mathbb{R}, \cdot)$ y el conjunto de vectores:

$$A = \{ \vec{V}_1 = (-2, 1, 3), \vec{V}_2 = (4, 2, -1), \vec{V}_3 = (2, 3, 2) \}$$

Determinar si A es L.D.

Desarrollo: Estableciendo una combinación lineal e igualando a cero:

$$\alpha_1 \vec{V}_1 + \alpha_2 \vec{V}_2 + \alpha_3 \vec{V}_3 = \vec{0}$$

$$(*) \quad \alpha_1(-2, 1, 3) + \alpha_2(4, 2, -1) + \alpha_3(2, 3, 2) = \vec{0}$$

Realizando operaciones y formando el sistema:

$$\begin{cases} -2\alpha_1 + 4\alpha_2 + 2\alpha_3 = 0 \\ \alpha_1 + 2\alpha_2 + 3\alpha_3 = 0 \\ 3\alpha_1 - \alpha_2 + 2\alpha_3 = 0 \end{cases}$$

Resolviendo el sistema por Gauss-Jordan

-2	4	2	0
1	2	3	0
3	-1	2	0
0	8	8	0
1	2	3	0
0	-7	-7	0
0	0	0	0
2	1	-1	0
0	1	1	0

$$8 - \frac{(8)(-7)}{-7} = 0$$

$$2 - \frac{(3)(-7)}{-7} = -1$$

$$4 - \frac{(-2)(2)}{1} = 8$$

$$2 - \frac{(-2)(3)}{1} = 8$$

$$-1 - \frac{(3)(2)}{1} = -7$$

$$2 - \frac{(3)(3)}{1} = -7$$

Luego, el sistema se transforma:

$$\begin{cases} \alpha_1 - \alpha_2 = 0 \\ \alpha_2 + \alpha_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 = \alpha_2 \\ \alpha_3 = -\alpha_2 \end{cases} \text{ (Infinitas soluciones)}$$

Una solución particular es:

Si $\alpha_2 = 2$ (valor arbitrario $\neq 0$); entonces:

entonces los valores arbitrarios

Sustituyendo en ecuación (*)

$$\alpha_1 = 2; \alpha_3 = -2$$

$$\alpha_1 = \alpha_2 \rightarrow \alpha_2 = 2$$

$$\begin{aligned} 2(-2, 1, 3) + 2(4, 2, -1) - 2(2, 3, 2) &= (0, 0, 0) \\ (-4, 2, 6) + (8, 4, -2) + (-4, -6, -4) &= (0, 0, 0) \\ (-4 + 8 - 4, 2 + 4 - 6, 6 - 2 - 4) &= (0, 0, 0) \\ (0, 0, 0) &= (0, 0, 0) \end{aligned}$$

$\therefore A$ es Linealmente Dependiente.

2. Sea el espacio vectorial $(\mathbb{R}^4, +, \mathbb{R}, \cdot)$ y el conjunto de vectores:

$$B = \{(-2, 0, 4, 1), (5, -3, -1, 2), (3, -2, 0, -4)\}$$

Averiguar si B es L.D.

4.3.2. Independencia lineal

Dado un conjunto finito de vectores $A = \{\vec{V}_1, \vec{V}_2, \dots, \vec{V}_r\}$, se afirma que A es linealmente independiente si no es posible encontrar una combinación lineal de los vectores de A , que sea igual al vector nulo, con algún escalar diferente de cero.

En símbolos: $A = \{\vec{V}_1, \vec{V}_2, \dots, \vec{V}_r\}$.

A es Linealmente Independiente $\Leftrightarrow (\forall i) : \sum_{i=1}^r \alpha_i \vec{V}_i = \vec{0} \Rightarrow \alpha_i = 0$.

Ejemplo 4.4 1. Sea el espacio vectorial $(\mathbb{R}^3, +, \mathbb{R}, \cdot)$ y el conjunto de vectores:

$$A = \{(3, -1, 2), (-4, 2, 1), (-3, -2, 2)\}$$

Establecer si A es L.I.

Desarrollo: $\alpha_1 \vec{V}_1 + \alpha_2 \vec{V}_2 + \alpha_3 \vec{V}_3 = \vec{0}$

$$(*) \quad \alpha_1 (3, -1, 2) + \alpha_2 (-4, 2, 1) + \alpha_3 (-3, -2, 2) = (0, 0, 0)$$

Realizando operaciones y formando el sistema:

$$\begin{cases} 3\alpha_1 - 4\alpha_2 - 3\alpha_3 = 0 \\ -\alpha_1 + 2\alpha_2 - 2\alpha_3 = 0 \\ 2\alpha_1 + \alpha_2 + 2\alpha_3 = 0 \end{cases}$$

Resolviendo el sistema por Gauss-Jordan:

3	-4	-3	0
-1	2	-2	0
2	1	2	0
11	0	5	0
-5	0	-6	0
2	1	2	0
11/5	0	1	0
41/5	0	0	0
-9	1	0	0
0	0	1	0
α_1 1	0	0	0
0	α_2 1	0	0

Luego, el sistema se transforma:

$$\begin{cases} \alpha_3 = 0 \\ \alpha_1 = 0 \\ \alpha_2 = 0 \end{cases} \quad (\text{Solución trivial})$$

Sustituyendo en ecuación (*):

$$\begin{aligned} \alpha_1 (3, -1, 2) + \alpha_2 (-4, 2, 1) + \alpha_3 (-3, -2, 2) &= (0, 0, 0) \\ (0, 0, 0) &= (0, 0, 0) \end{aligned}$$

$\therefore A$ es Linealmente Independiente.

2. Sea el espacio vectorial $(\mathbb{R}^4, +, \mathbb{R}, \cdot)$ y el conjunto de vectores:

$$B = \{(4, -2, 0, 1), (-6, 5, -2, 3), (-2, 3, -2, 4)\}$$

Determinar si B es L.I.

4.4. Subespacios vectoriales

Se afirma que " F " es un subespacio vectorial del espacio vectorial $(V, +, \mathbb{R}, \cdot)$, cuando F es un subconjunto no vacío de V y además es cerrado respecto a la ley de adición y multiplicación escalar.

4.4.1. Teorema

F es un subespacio vectorial de $(V, +, \mathbb{R}, \cdot)$ si y sólo si cumple las siguientes condiciones.

1. $\phi \neq F \subset V$.
2. $\vec{x} \in F \wedge \vec{y} \in F \Rightarrow \vec{x} + \vec{y} \in F$.
3. $\alpha \in \mathbb{R} \wedge \vec{x} \in F \Rightarrow \alpha \vec{x} \in F$.

Ejemplo 4.5 1. Sea el espacio vectorial $(\mathbb{R}^3, +, \mathbb{R}, \cdot)$ y el conjunto

$$A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / 4x - 2y + 8z = 0\} \rightarrow 2y = 4x + 8z$$

Determinar si $(A, +, \mathbb{R}, \cdot)$ es un subespacio vectorial de $(\mathbb{R}^3, +, \mathbb{R}, \cdot)$.

Desarrollo:

Inicialmente despejamos una de las variables, es decir:

$$A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / y = 2x + 4z\}$$

1ro. A es subconjunto de $\mathbb{R}^3$ por definición.

Si $x = 2$; $z = -3$ (valores arbitrarios), entonces:

$$\begin{aligned} \text{Valores dados} \quad y &= 2(2) + 4(-3) \\ \text{por nosotras} \quad y &= -8 \end{aligned} \quad (2, -8, -3) \in A \Rightarrow A \neq \phi$$

$\therefore$ Cumple.

2do. $(x_1, y_1, z_1) \in A \wedge (x_2, y_2, z_2) \in A$

$$y_1 = 2x_1 + 4z_1; y_2 = 2x_2 + 4z_2$$

$$(x_1, 2x_1 + 4z_1, z_1) \in A \wedge (x_2, 2x_2 + 4z_2, z_2) \in A$$

$$(x_1, 2x_1 + 4z_1, z_1) + (x_2, 2x_2 + 4z_2, z_2) = (x_1 + x_2, 2x_1 + 4z_1 + 2x_2 + 4z_2, z_1 + z_2)$$

$$(x_1, 2x_1 + 4z_1, z_1) + (x_2, 2x_2 + 4z_2, z_2) = [x_1 + x_2, 2(x_1 + x_2) + 4(z_1 + z_2), z_1 + z_2] \in A$$

$\therefore$ Cumple.

3ro. $\alpha \in \mathbb{R} \wedge (x, y, z) \in A$

$$y = 2x + 4z$$

$$\alpha \in \mathbb{R} \wedge (x, 2x + 4z, z) \in A$$

$$\alpha(x, 2x + 4z, z) = (\alpha x, 2\alpha x + 4\alpha z, \alpha z) \in A$$

$\therefore$ Cumple

Por tanto, $(A, +, \mathbb{R}, \cdot)$ es un subespacio vectorial de $(\mathbb{R}^3, +, \mathbb{R}, \cdot)$.

2. Sea el espacio vectorial $(\mathbb{R}^4, +, \mathbb{R}, \cdot)$ y el conjunto

$$B = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 / x_3 = x_1 - 6 \wedge x_2 = 4x_4\}$$

Averiguar si $(B, +, \mathbb{R}, \cdot)$ es un subespacio vectorial de $(\mathbb{R}^4, +, \mathbb{R}, \cdot)$.

1ro. B es subconjunto de $\mathbb{R}^4$ por definición:

Si $x_1 = 1; x_4 = 2$; entonces:

Dando los valores $x_1 = 1$
 $x_2 = 4(2)$
 $x_3 = 1 - 6$
 $x_4 = 2$

$$(1, 8, -5, 2) \in B \Rightarrow B \neq \emptyset$$

$\therefore$ Cumple.

2do. $(x_1, x_2, x_3, x_4) \in B \wedge (y_1, y_2, y_3, y_4) \in B$

$$\star \begin{cases} x_3 = x_1 - 6; x_2 = 4x_4; y_3 = y_1 - 6; y_2 = 4y_4 \end{cases}$$

$$(x_1, 4x_4, x_1 - 6, x_4) \in B \wedge (y_1, 4y_4, y_1 - 6, y_4) \in B$$

$$\begin{aligned} (x_1, 4x_4, x_1 - 6, x_4) + (y_1, 4y_4, y_1 - 6, y_4) &= (x_1 + y_1, 4x_4 + 4y_4, x_1 - 6 + y_1 - 6, x_4 + y_4) \\ (x_1, 4x_4, x_1 - 6, x_4) + (y_1, 4y_4, y_1 - 6, y_4) &= (x_1 + y_1, 4(x_4 + y_4), x_1 + y_1 - 12, x_4 + y_4) \notin B \end{aligned}$$

x_1, x_2, x_3, x_4

$\therefore$ No cumple.

De donde $(B, +, \mathbb{R}, \cdot)$ no es subespacio vectorial de $(\mathbb{R}^4, +, \mathbb{R}, \cdot)$.

3. Sea el espacio vectorial $(\mathbb{R}^3, +, \mathbb{R}, \cdot)$ y los conjuntos:

$$\begin{aligned} C &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / 5x - 10y + 20z = 0\} \\ D &= \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 / x_2 = -6x_1 \wedge x_3 = 8\} \end{aligned}$$

Determinar si constituyen subespacios vectoriales de $(\mathbb{R}^3, +, \mathbb{R}, \cdot)$.

4.5. Sistema de generadores

Un conjunto de vectores $A = \{\vec{V}_1, \vec{V}_2, \dots, \vec{V}_r\}$ es un sistema de generadores de V , si y sólo si todo vector de V puede expresarse como una combinación lineal del conjunto A .

En símbolos:

$$A \text{ es sistema de Generad. de } V \Leftrightarrow \vec{V} \in V \Rightarrow \vec{V} = \sum_{i=1}^r \alpha_i \vec{V}_i.$$

Ejemplo 4.6 Sea el espacio vectorial $(\mathbb{R}^3, +, \mathbb{R}, \cdot)$ y el conjunto:

$$A = \{(1, 1, 1), (2, 1, 2), (1, 0, 0)\}$$

Determinar si A es un S.G. de $\mathbb{R}^3$.

Desarrollo:

Sea $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$.

$$\begin{aligned} (*) \quad (a, b, c) &= \alpha_1 (1, 1, 1) + \alpha_2 (2, 1, 2) + \alpha_3 (1, 0, 0) \\ (a, b, c) &= (\alpha_1, \alpha_1, \alpha_1) + (2\alpha_2, \alpha_2, 2\alpha_2) + (\alpha_3, 0, 0) \\ (a, b, c) &= (\alpha_1 + 2\alpha_2 + \alpha_3, \alpha_1 + \alpha_2, \alpha_1 + 2\alpha_2) \end{aligned}$$

Iguando sus componentes y formando un sistema:

$$\begin{cases} (1) & \alpha_1 + 2\alpha_2 + \alpha_3 = a \\ (2) & \alpha_1 + \alpha_2 = b \quad (-1) \\ (3) & \alpha_1 + 2\alpha_2 = c \quad (-1) \end{cases}$$

Tomamos (1) y (3)

$$\alpha_1 + 2\alpha_2 + \alpha_3 = a$$

$$-\alpha_1 - 2\alpha_2 = -c$$

$$\alpha_3 = a - c$$

Tomamos (2) y (3)

$$-\alpha_1 - \alpha_2 = -b$$

$$\alpha_1 + 2\alpha_2 = c$$

$$\alpha_2 = -b + c$$

Sustituyendo en (2)

$$\alpha_1 + (-b + c) = b$$

$$\alpha_1 = 2b - c$$

Verificando en ecuación (*):

$$(a, b, c) = (2b - c)(1, 1, 1) + (-b + c)(2, 1, 2) + (a - c)(1, 0, 0)$$

$$(a, b, c) = (2b - c, 2b - c, 2b - c) + (-2b + 2c, -b + c, -2b + 2c) + (a - c, 0, 0)$$

$$(a, b, c) = (2b - c - 2b + 2c, 2b - c - b + c, 2b - c - 2b + 2c) + (a - c, 0, 0)$$

$$(a, b, c) = (a, b, c)$$

Por tanto el conjunto A es un sistema de Generadores de $\mathbb{R}^3$.

4.6. Base y dimensión de un espacio vectorial

Un conjunto de vectores $A = \{\vec{V}_1, \vec{V}_2, \dots, \vec{V}_n\}$ es una base del espacio vectorial $(V, +, \cdot)$, si y sólo si A es linealmente independiente y además si A es un sistema de generadores de V.

La dimensión de un espacio vectorial, es el número de vectores que posee la base de un espacio vectorial.

Si un espacio vectorial consta únicamente del vector nulo, entonces se afirma que su dimensión es cero.

Ejemplo 4.7 — 1. Sea el espacio vectorial $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$ y el conjunto de vectores:

$$A = \{(2, 0, 2), (1, -1, 0), (1, 1, 1)\}$$

Determinar si A es base de $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$. Asimismo hallar su dimensión.

Desarrollo:

Primeramente analizamos si A es L.I.:

$$(*) \quad \alpha_1(2, 0, 2) + \alpha_2(1, -1, 0) + \alpha_3(1, 1, 1) = (0, 0, 0)$$

$$\begin{cases} 2\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0 \\ -\alpha_2 + \alpha_3 = 0 \\ 2\alpha_1 + \alpha_3 = 0 \end{cases}$$

Resolviendo el sistema será:

2	1	1	0
0	-1	1	0
2	0	1	0
2	1	1	0
2	0	2	0
2	0	1	0
1	1	0	0
1	0	1	0
1	0	0	0
0	1	0	0
0	0	1	0
1	0	0	0

Gauss Jordan

Luego:

$$\begin{cases} \alpha_1 = 0 \\ \alpha_2 = 0 \\ \alpha_3 = 0 \end{cases} \quad (\text{Solución trivial})$$

Sustituyendo en ecuación (*):

$$0(2, 0, 2) + 0(1, -1, 0) + 0(1, 1, 1) = (0, 0, 0)$$

$$(0, 0, 0) = (0, 0, 0)$$

$\therefore A$ es L.I.

Seguidamente observamos si A es S.G. de $\mathbb{R}^3$

$$(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$$

$$(*) (a, b, c) = \alpha_1(2, 0, 2) + \alpha_2(1, -1, 0) + \alpha_3(1, 1, 1)$$

el mismo del anterior

$$\begin{cases} (1) & 2\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = a \\ (2) & -\alpha_2 + \alpha_3 = b \\ (3) & 2\alpha_1 + \alpha_3 = c \end{cases} \quad (-1)$$

Tomamos (1) y (3)

$$2\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = a$$

$$-2\alpha_1 - \alpha_3 = -c$$

$$\alpha_2 = a - c$$

Sustituyendo en (2)

$$-(a - c) + \alpha_3 = b$$

$$\alpha_3 = a + b - c$$

Sustituyendo en (3)

$$2\alpha_1 + a + b - c = c$$

$$\alpha_1 = \frac{-a - b + 2c}{2}$$

Verificando en ecuación (*):

$$(a, b, c) = \frac{1}{2}(-a - b + 2c)(2, 0, 2) + (a - c)(1, -1, 0) + (a + b - c)(1, 1, 1)$$

$$(a, b, c) = (-a - b + 2c, 0, -a - b + 2c) + (a - c, -a + c, 0) + (a + b - c, a + b - c, a + b - c)$$

$$(a, b, c) = [-a - b + 2c + a - c + a + b - c, -a + c + a + b - c, -a - b + 2c + a + b - c]$$

$$(a, b, c) = (a, b, c)$$